

随机 Petri 网模型中变迁的串、并联性能等价化简技术

田立勤, 林 闯, 周文江

(清华大学计算机科学与技术系, 北京 100084)

摘 要: 随机 Petri 网的状态空间爆炸问题的研究始终是 Petri 网研究的主要问题之一. 在随机 Petri 网模型中, 变迁的串、并联是 Petri 网模型的主要基本形式, 对它的化简不仅有助于解决随机 Petri 网状态空间的爆炸问题, 而且也为其其他随机 Petri 网的化简技术提供一个坚实的基础. 另外在诸如工作流、多媒体等重要的随机 Petri 网模型中也存在大量的变迁的串、并联结构, 所以对随机 Petri 网模型变迁的串、并联的化简, 特别是能够推导出它的性能等价的数学公式就显得很有必要. 本文详细阐述了随机 Petri 网变迁的串并联的模型化简技术, 推导出了变迁的串、并联化简的性能等价公式, 并给出一个化简的例子, 最后对结果的相关问题进行了分析.

关键词: 随机 Petri 网; 模型化简; 串联、并联变迁化简; 性能等价方程

中图分类号: TP302 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 08-1134-04

Performance Equivalent Simplification of Sequent and Parallel Transitions in Stochastic Petri Nets

TIAN Li-qin, LIN Chuang, ZHOU Wen-jiang

(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: State space's explosion of Stochastic Petri Nets (SPN) is always one of the important problems to solve. In Stochastic Petri Nets, sequent and parallel transitions are primary structure. Simplification of sequent and parallel transitions can not only help to solve the problem of state space's explosion, but also make preparations for other simplification methods. Meanwhile, in some important SPN models, such as Workflow and Multimedia, there are a lot of sequent and parallel transitions, so simplifying sequent and parallel transition structure, especially deducing its equivalent equation will make a significant contribution to simplification of whole SPN. The authors discuss sequent and parallel transition model and simplification theory, deduce their performance equivalent equations, give an example of simplification of SPN model, and finally analyze the conclusion.

Key words: stochastic Petri nets; simplification of model; simplification of sequent and parallel transition; performance equivalent equation

1 引言

自从 1981 年随机 Petri 网 (Stochastic Petri Net, 简称 SPN) 提出以来^[1], SPN 的理论、分析技术和应用已经得到很大发展. 在大型、复杂系统的模型中, Petri 网应用的主要困难是模型状态空间的复杂性问题, 对模型化简技术的研究始终是 Petri 网研究的主要问题之一^[2~3]. 在随机 Petri 网的结构中, 串、并联结构是 SPN 模型的两个主要的基本结构, 对于它的化简有助于解决 SPN 状态空间爆炸问题, 并为其它化简技术提供一个必要的基础. 一些重要的 SPN 模型中含有大量的串、并联结构, 如在工作流模型中^[4~5]的四个基本结构中的顺序模型和并行模型; 另外, 在多媒体模型中^[6~7], 并行和同步结构是非常重要的两个基本结构, 它们都可以对应到随机 Petri 网的变

迁的并联结构中来. 本文给出了在随机 Petri 网模型中, 变迁的串、并联性能等价化简的基本原理、性能等价公式的推导与证明, 最后对结论的相关问题进行了分析.

2 变迁并联模型的性能等价化简

2.1 随机 Petri 网的变迁并联模型

随机 Petri 网的变迁并联模型如图 1, 它表示 n 个变迁从瞬时变迁^[8] t_{start} 处开始并行执行, 到瞬时变迁 t_{end} 同步后结束.

2.2 性能等价化简原理

假定 n 个时间变迁并联的延时是 n 个独立的随机变量, 并服从指数分布函数, 那么, 我们可以用下列定理作为我们的理论基础.

收稿日期: 2001-10-31; 修回日期: 2002-03-11

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60173012; No. 90104002); 国家重点基础研究发展规划 (973 计划) 项目 (G1999032707); 国家高技术研究发展计划 (863 计划) (No. 2001AA112080)

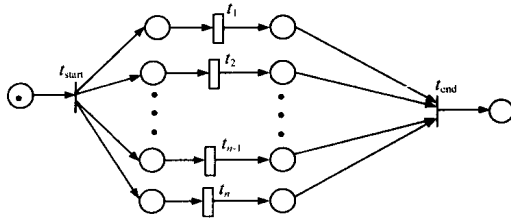


图 1 随机 Petri 网变迁并联模型

定理 1 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个独立的随机变量, 并服从同一个分布函数 $P(t)$, 用 $F_r(t) (r=1, 2, \dots, n)$ 表示第 r 次统计量 X_{f_r} 的分布函数, 那么最大次的统计量的分布函数为:

$$F_n(t) = P^n(t)$$

证明 因为所求的是最大次的统计量的分布函数, 所以有

$$F_n(t) = Pr\{X_{(n)} \leq t\} = Pr\{\text{所有 } X_i \leq t\}$$

又因为 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个独立的随机变量, 所以上式为:

$$= P^n(t)$$

证毕.

如果 n 个独立的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 分别服从参数为 $1, 2, \dots, n$ 的指数分布函数, 则可以推广上面定理的结论得到下面的论断.

推论 1 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个独立的随机变量, 且分别服从参数为 $1, 2, \dots, n$ 的指数分布函数 $P(t) = 1 - e^{-t}$, 即, $P_1(t) = 1 - e^{-1t}, P_2(t) = 1 - e^{-2t}, \dots, P_n(t) = 1 - e^{-nt}$. 用 $F_r(t) (r=1, 2, \dots, n)$ 表示第 r 次统计量 X_{f_r} 的分布函数, 那么最大次的统计量的分布函数为:

$$F_n(t) = Pr\{X_{(n)} \leq t\} = Pr\{\text{所有的 } X_i \leq t\} = P_1(t) P_2(t) \dots P_n(t)$$

上述结论成立的原因是因为 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个独立的随机变量, 且所求的是最大次的统计量 $X_{(n)}$ 的分布函数, 所以结果的分布函数可以直接由各个独立随机变量的分布函数相乘得到.

设 n 个变迁并联子系统的性能等价延迟为 T_n , 则由变迁并联的物理意义得 $T_n = \text{Max}\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, 它的期望值为:

$$T_s = E(T_n) = \int_0^{\infty} F_n(t) dt$$

在这个结论的基础上, 从最简单的两个变迁的并联开始推导其性能等价公式, 接着推导 n 个变迁并联的性能等价通用公式.

2.3 变迁并联的性能等价公式的推导及证明

(1) 两个变迁的并联

当两个变迁并联时, 由推论 1 得, 其性能等价延迟的分布函数为:

$$F_2(t) = p_1(t) p_2(t)$$

性能等价延迟的分布函数的导数为:

$$F_2'(t) = (1 - e^{-1t})'(1 - e^{-2t}) + (1 - e^{-1t})(1 - e^{-2t})'$$

则, 性能等价延迟的期望值为:

$$T_s = E(T_2) = \int_0^{\infty} F_2(t) dt = \int_0^{\infty} (1 - e^{-t})(1 - e^{-2t}) dt = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+2}$$

下面用数学归纳法来证明 n 个变迁并联的性能等价通用公式为:

$$\frac{1}{i} - \frac{k}{i-1} + \frac{k+1}{i+j} + \frac{k-1}{i-1} - \frac{k}{i+j} + \frac{k+1}{i+j+1} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k+1} \quad (1)$$

(2) n 个变迁并联的性能等价通用公式的证明:

由上面推出的结果知: 当 $n=2$ 等式(1)成立.

现假设 $n=k$ 时式(1)成立, 则 $n=k+1$ 时的分布函数为:

$$F_{k+1}(t) = F_k(t) P_{k+1}(t)$$

其导数为:

$$F_{k+1}'(t) = \frac{d}{dt} F_k(t) P_{k+1}(t) = \left(\frac{1}{i} - \frac{k}{i-1} + \frac{k+1}{i+j} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) e^{-t} + F_k(t) (-e^{-t})'$$

则, 由概率论期望值的公式知, 性能等价延迟的期望值为:

$$T_s = \int_0^{\infty} F_{k+1}(t) dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{k}{i-1} + \frac{k+1}{i+j} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) e^{-t} dt + \int_0^{\infty} F_k(t) (-e^{-t})' dt$$

亦即, 证明了公式(1)是成立的.

3 变迁串联模型的性能等价化简

3.1 随机 Petri 网变迁的串联模型

随机 Petri 网变迁的串联模型由顺序的变迁串联而成, 如图 2 所示.

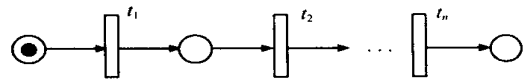


图 2 随机 Petri 网变迁的串联模型

3.2 两个变迁串联的性能等价公式的证明

为了求两个变迁串联的性能等价公式, 将这两个变迁组成一个活的、标记守恒的分析系统, 位置 S_1 中设置了一个初始标记, 如图 3:

解此分析网, 可有表 1 结果.

所得稳定状态方程:

$$\begin{cases} 1 p_1 = 2 p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

求解稳定状态概率: p_1

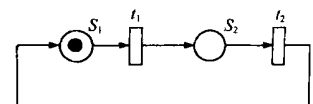


图 3 两个变迁串联组成一个活的、标记守恒的分析系统

$$= \frac{2}{1+2}$$

求得图 3 分析网的标记流平均输入速率: $= 1 p_1 =$

表 1

状态	S_1	S_2	稳定概率	马尔可夫链 (MC)
M_0	1	0	P_1	
M_1	0	1	P_2	

$$(1 - 2) / (1 + 2)$$

由于此分析网中有一个 S -不变量包括所有位置,所以分析网所含标记数量就是初始标识中的标记数量 1. 由 Little^[8]公式, 就是变迁串联分析网的平均实施速率.

则,图 3 分析网的一个标记平均延迟时间为:

$$1/\lambda = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2. \text{ 可以看出当分析网是}$$

由一系列变迁 t_i 串联 ($1 \leq i \leq k$) 组成时,它的等效变迁 t 的平均实施速率 可由下列公式给出:

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i} \quad (2)$$

其中: λ_i 是分析网中与变迁 t_i 相联系的平均实施速率.

3.3 n 个变迁串联的性能等价公式的证明

前面已证明当 $k=2$ 时,确有 $1/\lambda = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2$,表明公式 2 在 $k=2$ 时正确. 现用数学归纳法对子网中的变迁数量进行归纳证明. 假定 $k=n-1$ 时公式 (2) 成立,亦即有:

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

可将 $n-1$ 个变迁使用一个非基本变迁 t 替代, t 的实施速率为 λ . 当 $k=n$ 时,可将子网看成由变迁 t 和 t_n 组成,因已证明 $k=2$ 时成立,所以有:

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i}$$

亦即,证明了公式 2 是成立的.

4 SPN 模型的性能等价化简实例

下面给出一个简单的串、并联结构的例子,并用已得到的串并联的性能等价公式求出其性能等价的变迁延迟时间,模型如下图,并假设变迁 t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 延迟时间分别为 20, 10, 40, 100, 60, 即:

$$\frac{1}{\lambda_1} = 20, \frac{1}{\lambda_2} = 10, \frac{1}{\lambda_3} = 40, \frac{1}{\lambda_4} = 100, \frac{1}{\lambda_5} = 60.$$

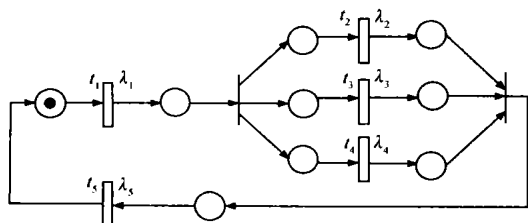


图 4 一个串、并联随机 Petri 模型

先由变迁并联的性能等价公式 (1) 求当 $n=3$ 时,变迁 t_2, t_3, t_4 并联的性能等价时间,等价后的模型见图 5,其中变迁 t_0

是变迁 t_2, t_3, t_4 并联等价后的非基本变迁.

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+2} - \frac{1}{4+3} - \frac{1}{2+4} + \frac{1}{4+2+3} \\ &= 10 + 40 + 100 - \frac{1}{1/10 + 1/40} - \frac{1}{1/10 + 1/100} \\ &\quad - \frac{1}{1/40 + 1/100} + \frac{1}{1/10 + 1/40 + 1/100} = 111.745. \end{aligned}$$

再根据变迁串联的性能等价公式求总的变迁延迟时间,即,图 4 模型的一个标记总的延迟时间为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_5} = \frac{1}{\lambda_1} + T_s + \frac{1}{\lambda_5} \\ &= 20 + 111.745 + 60 = 191.745. \end{aligned}$$

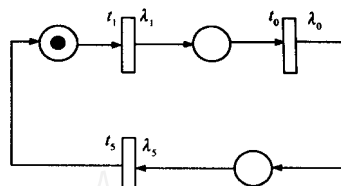


图 5 图 4 中变迁并联后的性能等价随机 Petri 模型

5 适用分析

由于变迁的串联结构容易理解,所以这里重点对变迁的并联结构的适用情况进行分析.

⑧ 变迁串、并联的性能等价公式也适用于包含瞬时变迁的结构

从推导过程可以看出,在 n 个变迁的并联结构中,当某个变迁的延迟时间恒为 0 时 (即包含瞬时变迁),它的变迁速率为 ∞ ,这样,在公式 (1) 中,与瞬时变迁相关的项,由于分母为 ∞ 而全部为零,其结果相当于 $n-1$ 个变迁的并联. 所以,当部分变迁为瞬时变迁,可用其余变迁延迟期望值不为零的变迁所组成的并联性能等价公式进行求解. 此结论对于变迁的串联结构也同样适用,即,若变迁的串联结构中含有瞬时变迁,在性能等价的化简计算公式中,可以忽略瞬时变迁的延迟时间.

⑨ 并联 n 个变迁延迟都服从同一个指数分布函数 $1 - e^{-\lambda t}$

在这种情况下变迁并联的性能等价公式与公式 $T_s = \frac{1}{\lambda} [\log n + C + O(1/n)]^{10}$ 等价,其中, C 是欧拉常数,这说明此公式是本文所得公式 (1) 的特例,这也验证本文公式 $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}$ 时的正确性. 从这个公式可以看出,在每个变迁都服从同一个指数分布函数 $1 - e^{-\lambda t}$ 的情况下,随着 n 的增大,变迁并联后的等价延迟也逐渐增大,这时因为相互同步等待而造成的干扰因素增多的缘故.

6 结论

对于一个实际的随机 Petri 模型,状态空间往往是很大的,这给性能的分析带来很大困难. 本文的工作可对模型的化简提供有效的手段,特别是得到了化简的性能等价公式,对化简提供一个定量的分析方法. 在诸如 workflow 等含有大量的串并联结构的模型化简中,此方法更为有效.

参考文献:

[1] M K Molly. Performance analysis using stochastic Petri nets [J]. IEEE

- Trans On Computers,1982 ,C-31 (9) :913 - 917.
- [2] G Cabodi ,P Camurati ,S Quer. Reachability analysis of large circuits using disjunctive partitioning and partial iterative squaring [J]. Systems Architecture ,2001 ,47 (2) :163 - 179.
- [3] W M Zuberek ,I Rada. Modeling and analysis of distributed state space generation for timed Petri nets [A]. 34-th Annual Simulation Symposium(SS - 2001) [C]. Stattle ,WA :The Society for Computer Simulation International (SCS) ,2001. 93 - 98.
- [4] K Salimifard ,M Wright. Petri net-based modelling of workflow systems : An overview [J]. European Journal of Operational Research ,2001 ,134 (3) :664 - 676.
- [5] W M P Van der Aalst ,A H M ter Hofstede. Verification of workflow task structures :A Petri-net-based approach [J]. Information Systems ,2000 ,25 (1) :43 - 69.
- [6] K Inseon ,P Junyeol ,S Joohan. Developing adaptive buffer-level synchronization algorithm by Petri nets for improving quality of multimedia related services [A]. 2000 IEEE International Conference on Systems , Man ,and Cybernetics(SMC2000) [C]. Nashville ,TN :8 - 11 October ,2000. 3195 - 3200.
- [7] E Debes. A new Petri net based model of data transfers in the PC workstation memory hierarchy for MPEG encoding [A]. The 2001 IEEE International Symposium on Circuits and Systems(ISCAS) [C]. Sydney , Australia :2001 (2) . 221 - 224.
- [8] 林闯. 计算机网络和计算机系统的性能评价 [M]. 北京 :清华大学出版社 ,2001.
- [9] W M Zuberek. Performance evaluation using unbound timed Petri nets [A]. Proc of the Third International Workshop on Petri Nets and Performance Models [C]. Kyoto ,Japan :1989. 180 ~ 186.
- [10] D C Marinescu ,R R John. Synchronization of nonhomogeneous parallel computations [A]. Parallel Proceeding for scientific Computing [C]. (G. Rosrigue. ed) ,SIAM Publication ,1989. 362 - 367.

作者简介:



田立勤 男,1970年10月生于陕西省定边县,硕士,讲师,主要研究方向是计算机网络,工作流模型,系统性能评价,报文分类和图论。



林闯 1948年7月生于辽宁省沈阳市,博士,清华大学计算机系教授,博士生导师,计算机网络研究所所长,同时为《计算机学报》编委,国家自然科学基金重大研究计划“网络和信息安全”的科学指导专家,中科院网络中心和北京科技大学兼职教授。主要研究领域为计算机网络,系统性能评价,随机 Petri 网,逻辑推演和推理系统。

已在 IEEE Transactions on Computers ,IEEE Transactions on Knowledge ,and Data Engineering 计算机学报、软件学报、电子学报、通信学报等国内外一级期刊上发表论文 80 多篇,并在国内出版专著 2 本。

周文江 男,1975年5月生于河北省唐山,硕士研究生,主要研究为计算机网络,分组调度算法,系统性能评价。